Synthese-oefeningen goniometrische en exponentiële funkties

Hieronder staan benaderingen voor cos(x), sin(x), tan(x) en e^x, die vooral in de buurt van 0 nauwkeurig zijn. Wat is wat? Er mag geen rekenmachine gebruikt worden.

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\ldots \quad =?$$

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad =?$$

$$h(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad =?$$

$$i(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots \quad =?$$

Leerlingen schieten vaak in een kramp als ze dit voorgeschoteld krijgen, omdat ze dergelijke vraagstelling niet gewoon zijn. Er is immers niet een kant-en-klaar algoritme dat zegt: voer deze berekeningen uit en je zult het antwoord vinden. Je moet hier dus heuristisch te werk gaan, een beetje snuffelen in je trukkendoos en zien wat je kan afleiden zonder dat je hoeft te weten hoe je aan die machtreeksen (veeltermen die oneindig doorlopen) komt.

Laat ons de opties eens met **gewoon gezond boerenverstand** bekijken.

1) Voor x ‘in de buurt van 0’, zelfs voor alle waarden <1, blijven alle machten van x kleiner dan 1, terwijl de noemers snel groter worden naarmate de exponent groter wordt. De opeenvolgende termen worden dus snel kleiner, en dus moeten we vooral naar de eerste termen kijken.
2) Als de benadering in de buurt van 0 moet kloppen, moet ze uiteraard eerst en vooral in 0 zelf kloppen. Hier zien we dat f(0)=i(0)=0 en g(0)=h(0)=1, dus daarmee weten we alvast dat f en i moeten overeenkomen met sin of tan want die gaan ook door de oorsprong. De andere twee gaan inderdaad door (0,1).
3) Wat is het verschil tussen f en i? Bij i zien we alleen plustekens, bij f afwisselend + en -, dus moet i sterker stijgen (zowel links en rechts van 0 want er staan alleen oneven machten). Aangezien steeds |tan(x)|>|sin(x)|, moet i dus wel de tangens zijn en f de sinus.
4) Analoog met g en h: je hoeft alleen te weten dat cos in 0 een maximum heeft en dus links en rechts kleiner is, terwijl e^x overal stijgend is. Dus h moet cos zijn en g de exponentiële.

Voila, geen zware berekeningen nodig, gewoon een beetje kijken. Het verloop van de basisfunkties moet je natuurlijk wel ongeveer in je hoofd hebben.
Opm.: je kan ondertussen wel al vermoeden dat de tangensbenadering niet zal kunnen blijven werken als x naar π/2 gaat, want met veeltermen kan je nooit een vertikale asymptoot krijgen.

Ander voorbeeld, ietsjes moeilijker, hoewel...:

$$\ln(\cos(x)) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots \qquad \text{(A)}$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots \qquad \text{(B)}$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{45} + \ldots \qquad \text{(C)}$$

$$\ln(\cos(x)) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{45} - \ldots \qquad \text{(D)}$$

Wat is het juiste antwoord, A, B, C of D? (Weer in de veronderstelling dat de benadering vooral in de buurt van 0 moet goed zijn.)

1) Wat als x=0? Cos(0)=1, ln(1)=0, dus ln(cos(0))=0. Bij alle vier de reeksen krijgen we 0 als we x=0 stellen, dus daarmee zijn we verder niks.
2) De noemers zijn overal gelijk, maar A en B hebben alleen even machten, C en D oneven. A en B hebben dus grafieken die je kan spiegelen rond de y-as! C en D kan je puntspiegelen door de oorsprong. Hoe zit dat nu bij ln(cos(x))? Zeer simpel: aangezien cos(-x) = cos(x), moet dus ook ln(cos(-x)) = ln(cos(x))! Dus, alleen opties A en B blijven over.
3) Wat is het verschil tussen A en B? Zeer simpel: A geeft steeds een positief resultaat, B is steeds negatief! Wat doet ln(cos(x))? Cos bereikt een maximale waarde van 1 als x=0 en wordt nergens groter dan 1. Gelijk welk logaritme met een grondtal groter dan 1 wordt negatief voor getallen<1, dus ook ln, dus moet ln(cos(x)) < 0 zijn in de buurt van x=0, dus alleen B kan kloppen!

Voor wie benieuwd is **hoe men aan zulke benadering kan komen**: we lichten een tipje van de sluier op...

Kies een **startpunt waarvan je de funktiewaarde exakt kent**, dus voor cos, sin, tan en exp is dat bv. 0; voor logaritmen kan je van 1 starten.

Je kunt beginnen met een benadering van de **0de graad**: funktiewaarden in de buurt van het startpunt zijn ongeveer gelijk aan die in het startpunt. Dus bv. sin(x)≈0 als x≈0, of ln(x)≈0 als x≈1. Dat is natuurlijk een bijzonder slechte benadering.

Beter gaat het al met de **raaklijn**, d.w.z. een eerstegraadsbenadering. Je eist dan dat de afgeleide gelijk is aan de richtingskoëfficiënt van die lijn. Voor de sinus is die gelijk aan 1 vermits sin'(0) = cos(0) = 1, dus de raaklijn is y=x, dus sin(x) ≈ x is de 1stegraadsbenadering. Dit wordt bv. toegepast in de natuurkundeles om de bewegingsvergelijking van een ('harmonische') slinger op te stellen; die blijft nl. netjes harmonisch slingeren zolang de uitwijkingshoek niet te groot wordt. Voor cos is de raaklijn horizontaal, dus blijft de benadering van de 1ste graad gelijk aan die van de 0de graad. Voor ln(x) vind je y=x-1 als raaklijn als x=1 (reken na), dus ln(x) ≈ x-1 als x ≈1.

Een nog betere benadering kan je krijgen door een **raakparabool** te zoeken, d.w.z. een kromme van de vorm $y=ax^2+bx+c$, waarbij je eist dat in het startpunt de funktiewaarden en de afgeleiden van uw funktie en de parabool gelijk zijn. Dit zijn maar 2 voorwaarden en er zijn 3 onbekende parameters. Er zijn dus oneindig veel oplossingen (probeer je dit grafisch in te beelden). Als we eisen dat de raakparabool zo vloeiend mogelijk de kromming van onze funktie moet volgen, dan moeten beide ook dezelfde 2de afgeleide hebben. Zo verkrijgen we bv. dat $\cos(x) \approx 1-x^2/2$ (reken na). Voor de sinus komt er geen 2degraadsterm, wat logisch is, gezien de oneven symmetrie daarvan.

En zo kunnen we steeds maar verder gaan: een **raak-derdegraadskromme** zoeken waarbij dan ook de 3de afgeleiden gelijk moeten zijn, enz. De gemakkelijkste om te proberen, is e^x, vermits alle afgeleiden tot het einde der tijden 1 zijn voor x=0. Je kan dan simpelweg een **benadering voor e** bekomen door x=1 in te vullen! Is dat geen prachtig resultaat?

Wie meer wil weten: www.lerenisplezant.be/teksten/Reeksontwikkeling.pdf

Koen Van de moortel, 28 nov. 2019

Wie bedenkingen heeft over mijn spelling: www.astrovdm.com/toest_nl.htm.